Домашна работа 1 по Алгебра 1. 4 Въпрос.

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Ноември 2021

4 Въпрос В пространството $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ на полиномите на x от степен ≤ 4 с реални коефициенти са дадени подмножества

$$U = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \mid f(1) = f(2) = f(-2) = 0 \right\} \text{ и}$$
$$W = \left\{ f(x) \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} \mid f(1) = 2f'(1),\ f(3) = 0 \right\}.$$

Да се докаже, че U и W са подпространства на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ и $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)} = U \oplus W$ е тяхната директна сума.

Решение: За произволни полиноми $f, g \in U$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(f+g)(1) = f(1) + g(1) = f(2) + g(2) = (f+g)(2) \\
&(f+g)(2) = f(2) + g(2) = f(-2) + g(-2) = (f+g)(-2) \\
&(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 0 + 0 = 0 \\
&\implies (f+g) \in U
\end{aligned}$$

За произволен полином $f \in U$ и произволно реално число $r \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(rf)(1) = r \cdot f(1) = r \cdot f(2) = (rf)(2) \\
&(rf)(2) = r \cdot f(2) = r \cdot f(-2) = (rf)(-2) \\
&(rf)(-2) = r \cdot f(-2) = r \cdot 0 = 0 \\
&\implies (rf) \in U
\end{aligned}$$

$\implies$ U е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$

За поризволни полиноми $f, g \in W$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2f'(1) + 2g'(1) = 2(f'+g')(1) \\
&(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 0 + 0 = 0 \\
&\implies (f+g) \in W
\end{aligned}$$

За произволен полином $f \in U$ и произволно реално число $r \in \mathbb{R}$ е в сила

$$\begin{aligned}
&(rf)(1) = r \cdot f(1) = r \cdot 2f'(1) = 2(rf')(1) \\
&(rf)(3) = r \cdot f(3) = r \cdot 0 = 0 \\
&\implies (rf) \in W
\end{aligned}$$

$\implies$ W е подпространство на $\mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$

Сумата $U + W$ е директна, тогава и само тогава когато сечението $U \cap W = 0$ се изчерпва от тъждествено нулевия полином $0 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$.
Ако $f(x) \in U \cap W$, то $f(1) = f(2) = f(-2) = 0$, $f(1) = 2f'(1) = 0$ и $f(3) = 0$.

Следователно, коефициентите $a_i \in \mathbb{R}$ на полинома $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 \in \mathbb{R}[x]^{(\leq 4)}$ и на неговата производна $f(x) = 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ изпълняват равенствата

$$\begin{array}{rcll} f(1) & = & a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 & = 0 \\ f(2) & = & a_4 \cdot 16 + a_3 \cdot 8 + a_2 \cdot 4 + a_1 \cdot 2 + a_0 & = 0 \\ f(-2) & = & a_4 \cdot 16 - a_3 \cdot 8 + a_2 \cdot 4 - a_1 \cdot 2 + a_0 & = 0 \\ f'(1) & = & 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 & = 0 \\ f(3) & = & a_4 \cdot 81 + a_3 \cdot 27 + a_2 \cdot 9 + a_1 \cdot 3 + a_0 & = 0 \end{array}$$

Тоест, $(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^5$ е решение на хомогенна система линейни уравнения с матрица от коефициенти:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 16 & -8 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Умножаваме първи ред с -4 и го събираме с четвърти ред.
Умножаваме първи ред с -81 и го събираме с пети ред.
Умножаваме втори ред с -1 и го събираме с трети ред.
Умножаваме първи ред с -16 и го събираме с втори ред.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -14 & -15 \\ 0 & -16 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -54 & -72 & -78 & -80 \end{pmatrix}$$

Делим трети ред на -4.
Делим четвърти ред на -1.
Делим четвърти прети ред на -2.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -12 & -14 & -15 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 27 & 36 & 39 & 40 \end{pmatrix}$$

Умножаваме четвърти ред с 8 и събираме с втори.
Умножаваме четвърти ред с -4 и събираме с трети.
Умножаваме четвърти ред с -27 и събираме с пети.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 17 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -42 & -68 \end{pmatrix}$$

Умножаваме втори ред с 2 и събираме с трети.
Умножаваме пети ред с -2.
Умножаваме втори ред с -9.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -36 & -90 & -153 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 36 & 84 & 136 \end{pmatrix}$$

Събираме втори ред с пети. Делим втори ред на -9.
Умножаваме трети ред с 6.
Умножаваме пети ред с 9.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 10 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 108 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -54 & -153 \end{pmatrix}$$

Събираме трети ред с пети. Делим пети ред с -45.
Умножаваме и събираме пети ред с другите редове,
така че в десния стълб на тези редове да останат нули.

Чрез поредица от аналогични действия за другите редове и чрез размяна на втори с четвърти и трети с четвърти ред, системата се свежда до Гаус-Жорданов вид.
Следователно $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, което означава, че $U \cap W = \{0\}$ и сумата $U \oplus W$ е директна.